STK 203

TEORI STATISTIKA I

II. PEUBAH ACAK DISKRET

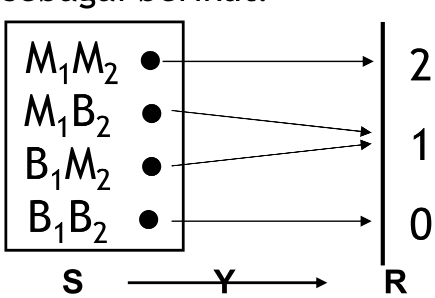
PEUBAH ACAK DISKRET

Definisi 2.1. (Peubah Acak) :

Peubah Acak Y adalah suatu fungsi yang memetakan seluruh anggota ruang contoh S ke himpunan bilangan nyata R; Y : S → R.

Ilustrasi 2.1. :

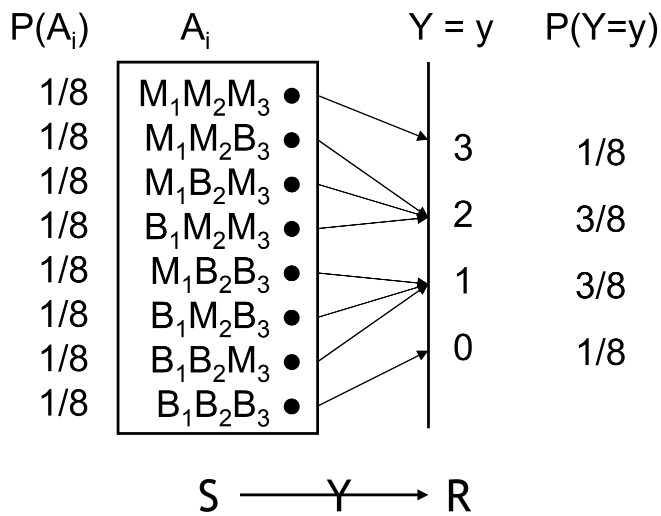
Perhatikan pelemparan dua buah koin, maka ruang contohnya adalah S = {(M_1M_2), (M_1B_2), (B_1M_2), (B_1B_2)}. Jika Y adalah banyaknya sisi M yang muncul dari pelemparan dua koin, maka nilai peubah acak Y yang mungkin diperoleh dapat digambarkan sebagai berikut:



Peubah Acak

Ilustrasi 2.2. :

Perhatikan pelemparan 3 buah koin yang setimbang. A_i = kejadian ke-i, i=1, 2, …, 8. Y = banyaknya sisi muka yang muncul



Fungsi Peluang Kumulatif

Definisi 2.2. (Fungsi Peluang Kumulatif) :

Fungsi peluang kumulatif dari peubah acak Y adalah

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$, untuk $-\infty < y < \infty$.

Ilustrasi 2.3. :

Jika peubah acak Y = banyaknya sisi M yang muncul dari dua koin yang setimbang, maka

$F_Y(y) = P(Y \leq y) =$???

Peubah Acak Diskret

Definisi 2.3. (Peubah Acak Diskret) :

Peubah acak Y disebut diskret, jika ruang contoh S dari peubah acak itu tercacah (berkorespondensi 1-ke-1 dengan himpunan bilangan bulat positif).

Dengan demikian, jika peubah acak Y diskret, maka banyaknya nilai y dari peubah acak Y yang bersifat $P(Y = y) > 0$ dapat dicacah (1 atau lebih).

Ilustrasi 2.4. :

Perhatikan pelemparan sebuah dadu sisi enam berkali-kali. Kemudian kita perhatikan dua peubah acak sbb.

(i) X = mata dadu yang muncul pada lemparan pertama

(ii) Y = banyaknya lemparan yang diperlukan sampai muncul mata dadu enam

Maka ruang contoh untuk masing-masing peubah acak X dan Y adalah :

(i) $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan

(ii) $S_Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Ilustrasi 2.5. :

Pada ilustrasi pelemparan 3 koin (ilustrasi 2.2.), maka $P(Y = y) = f_Y(y)$ dan $F_Y(y)$ dapat ditulis :

$$P(Y = y) = \begin{cases} 1/8, & y = 0, 3 \\ 3/8, & y = 1, 2 \\ 0, & y \text{ lainnya} \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1/8, & 0 \le y < 1 \\ 4/8, & 1 \le y < 2 \\ 7/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$

Definisi 2.4. (Fungsi Massa Peluang) :

Fungsi massa peluang (fmp) peubah acak Y adalah $f_Y(y) = P(Y = y)$, untuk $-\infty < y < \infty$

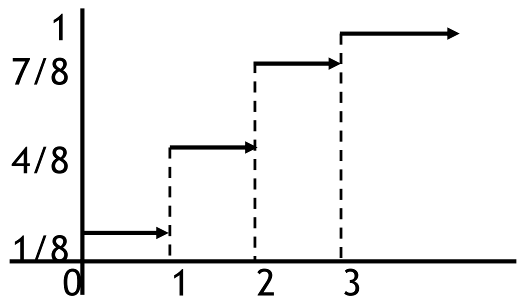
Jika $F_Y(y)$ adalah fungsi sebaran (kumulatif) suatu peubah acak diskret, maka berlaku :

1. $0 \le F_Y(y) \le 1$, untuk $-\infty < y < \infty$
2. $F_Y(y)$ merupakan fungsi tak-turun (tidak pernah turun)
3. $\lim_{y \to -\infty} F_Y(y) = 0$, dan $\lim_{y \to \infty} F_Y(y) = 1$
4. $F_Y(y)$ merupakan fungsi tangga (*step function*) dan loncatan (*jump*) pada setiap step y adalah nilai peluang Y pada titik tersebut, $f_Y(y) = P(Y = y)$

Ilustrasi 2.6. :

Pada ilustrasi pelemparan 3 koin (ilustrasi 2.2.), maka $F_Y(y)$ adalah

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1/8, & 0 \le y < 1 \\ 4/8, & 1 \le y < 2 \\ 7/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$



Nilai Harapan Peubah Acak Diskret

Nilai harapan suatu peubah acak Y adalah :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \Sigma_y\, y\, f_Y(y) \\ &= \Sigma_y\, y\, P(Y = y) \\ &= \Sigma_y\, y\, P_Y(y) \end{aligned}$$

Ilustrasi 2.7. :

Misal Y adalah suatu peubah acak diskret yang memiliki fmp :

y	1	2	3	4
f(y)	4/10	1/10	3/10	2/10

Maka $E(Y) = 1(4/10) + 2(1/10) + 3(3/10) + 4(2/10) = 23/10 = 2.3$

Definisi 2.5. (Nilai Harapan)

Nilai harapan untuk peubah acak diskret Y adalah

$E(Y) = \sum_{\{y|f(y)>0\}} y . f_Y(y)$

Dengan demikian nilai harapan dari g(Y), suatu fungsi peubah acak dari Y, adalah

$E([g(Y)]) = \sum_{\{y|f(y)>0\}} g(y) . f_Y(y)$

Nilai harapan dari peubah acak Y atau E(Y) disebut juga nilai tengah dari Y dengan simbol μ atau μ_Y, sehingga

$E(Y) = \mu = \mu_Y$

Ilustrasi 2.8. :

Diberikan suatu fmp peubah acak diskret sbb

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}(5-y), & y = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{y lainnya} \end{cases}$$

Nilai harapan dari Y adalah

$$\begin{aligned} \sum_{\text{all } y} y p_Y(y) &= \sum_{y=1}^{4} y \frac{1}{10}(5-y) \\ &= 1(4/10) + 2(3/10) + 3(2/10) + 4(1/10) = 2 \end{aligned}$$

E[g(Y)] untuk $g(Y) = Y^2 - 2Y + 2$?

Ilustrasi 2.8. :

Diberikan suatu fmp peubah acak diskret sbb

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}(5-y), & y = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{y lainnya} \end{cases}$$

Jika $u_1(Y) = Y^2$ dan $u_2(Y) = e^Y$, maka :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{\text{all } y} y^2 p_Y(y) \\ &= \sum_{y=1}^{4} y^2 \frac{1}{10}(5-y) \\ &= 1^2(4/10) + 2^2(3/10) + 3^2(2/10) + 4^2(1/10) = 5.0 \end{aligned}$$

Ilustrasi 2.8. :

Diberikan suatu fmp peubah acak diskret sbb

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}(5-y), & y = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{y lainnya} \end{cases}$$

Jika $g_1(Y) = Y^2$ dan $g_2(Y) = e^Y$, maka :

$$\begin{aligned} E(e^Y) &= \sum_{\text{all } y} e^y p_Y(y) \\ &= \sum_{y=1}^{4} e^y \frac{1}{10}(5-y) \\ &= e^1(4/10) + e^2(3/10) + e^3(2/10) + e^4(1/10) \approx 12.78 \end{aligned}$$

Perhatikan Y suatu peubah acak diskret dengan fmp $f_Y(Y)$ dan $g_j(Y)$, i = 1, 2, 3, …, k adalah fungsi dari peubah acak Y serta $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah suatu konstanta, maka:

$$E[\Sigma_{\forall i}\ c_i g_i(Y)] = \Sigma_{\forall i}\ E[c_i g_i(Y)] = \Sigma_{\forall i}\ c_i\ E[g_i(Y)]$$

a. Jika k = 1, $c_i = c$ dan $g_i(Y) = 1$,
   maka $E[\Sigma_{\forall i}\ c_i g_i(Y)] = E(c) = c$
b. Jika k = 1, $c_i = c$ dan $g_i(Y) = g(Y)$,
   maka $E[\Sigma_{\forall i}\ c_i g_i(Y)] = E[c\ g(Y)] = c\ E[g(Y)]$

Jika Y peubah acak diskret dengan fmp $f_Y(y)$ dan $\{y|f_Y(y) > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ maka akan berlaku

$$E(Y) = a_1\ f(a_1) + a_2\ f(a_2) + a_3\ f(a_3) + \ldots$$

yang tidak lain adalah <u>rataan aritmetik atau nilai tengah peubah acak Y</u>.

Dengan demikian nilai tengah μ_Y dari suatu peubah acak Y, jika ada, adalah $\mu_Y = E(Y)$.

Ragam suatu peubah acak

Perhatikan untuk $X = g(Y) = (Y - \mu_Y)^2$

$E(X) = E[g(Y)]$

$= \sum_y g(y)\, f(y)$

$= \sum_y (y - \mu)^2 f(y)$

$= (y_1 - \mu)^2 f(y) + (y_2 - \mu)^2 f(y) + \dots$

adalah ragam Y, σ^2_Y.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 Y &= E[(Y - \mu_Y)^2] \\
&= E[Y^2 - 2Y\mu_Y + \mu_Y^2] \\
&= E(Y^2) - 2\,\mu_Y\, E(Y) + \mu_Y^2 \\
&= E(Y^2) - 2\,\mu_Y^2 + \mu_Y^2 \\
&= E(Y^2) - \mu_Y^2
\end{aligned}
$$

Definisi 2.9. (Ragam)

Jika $E(Y) = \mu_Y$ dan $g(Y) = (Y - \mu_Y)^2$, maka ragam dari peubah acak Y adalah $Var(Y) = E[g(Y)]$

$= E[(Y - \mu_Y)^2]$

$= \sigma^2_Y$

Momen suatu peubah acak

Definisi 2.10. Momen

Momen ke-k dari suatu peubah acak Y adalah $\mu_k = E(Y^k)$ untuk k = 1, 2, 3, …

Ilustrasi 2.9.

$\mu_1 = E(Y)$

$\mu_2 = E(Y^2)$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \mu_2 - (\mu_1)^2$

Fungsi pembangkit momen (FPM)

Perhatikan untuk $X = g(Y) = e^{tY}$

$$E(X) = E[g(Y)] = \sum_y g(y)\, f(y)$$
$$= \sum_y e^{tY} f(y)$$

adalah fungsi pembangkit momen peubah acak Y dan dinotasikan dengan $m_Y(t)$.

Jika dua buah peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen yang sama, maka keduanya juga memiliki sebaran yang sama. Fungsi pembangkit momen bersifat unik dan menentukan sebaran peubah acak.

Dengan demikian suatu peubah acak Y dapat dicirikan dalam tiga bentuk :

1. Fungsi sebaran, $F_Y(y)$
2. Fungsi kepekatan atau fungsi massa peluang, $f_Y(y)$
3. Fungsi pembangkit momen, $m_Y(t)$

Menentukan nilai tengah dan ragam melalui fpm

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_Y(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{\text{all } y} e^{ty}p_Y(y)\\ &= \sum_{\text{all } y}\frac{d}{dt}e^{ty}p_Y(y)\\ &= \sum_{\text{all } y} ye^{ty}p_Y(y) = E(Ye^{tY})\end{aligned}$$

$$\left.\frac{dm_Y(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(Ye^{tY})\Big|_{t=0} = E(Y) = \mu_Y = \mu_1$$

$$\mu_k \equiv E(Y^k) = \left.\frac{d^k m_Y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \qquad \left.\frac{d^k m_Y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(Y^k).$$

$$E(Y) = \left.\frac{dm_Y(t)}{dt}\right|_{t=0},$$

$$E(Y^2) = \left.\frac{d^2 m_Y(t)}{dt^2}\right|_{t=0}.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \left.\frac{d^2 m_Y(t)}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dm_Y(t)}{dt}\right|_{t=0}\right)^2.$$

Ilustrasi 2.10.

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(3-y), & y = 0,1,2 \\ 0, & \end{cases}$$

Secara sederhana kita bisa memperoleh E(Y) = 2/3, E(Y^2) = 1 dan Var(Y) = 5/9.

Sekarang kita akan menentukan E(Y) dan Var(Y) melalui fpm.

$$\begin{aligned} m_Y(t) = E(e^{tY}) &= \sum_{\text{all } y} e^{ty} p_Y(y) \\ &= e^{t(0)}\frac{3}{6} + e^{t(1)}\frac{2}{6} + e^{t(2)}\frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}m_Y(t) = \frac{2}{6}e^t + \frac{2}{6}e^{2t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}m_Y(t) = \frac{2}{6}e^t + \frac{4}{6}e^{2t}.$$

$$E(Y) = \left.\frac{dm_Y(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{2}{6}e^0 + \frac{2}{6}e^{2(0)} = 4/6 = 2/3.$$

$$E(Y^2) = \left.\frac{d^2m_Y(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{2}{6}e^0 + \frac{4}{6}e^{2(0)} = 1,$$

Pertidaksamaan Chebysev

Ide : ingin menentukan batas bawah atau batas atas nilai peluang.

Teorema:

Misal g(Y) adalah fungsi non-negatif dari suatu peubah acak Y. Jika E(g(Y)) ada, maka untuk setiap konstanta positif c berlaku

$P[g(Y) \geq c] \leq E[g(Y)]/c$.

Teorema (pertidaksamaan Chebysev):

Misal Y adalah peubah acak yang mempunyai sebaran peluang dengan ragam σ^2 dan nilai tengah μ, maka untuk setiap k > 0 akan berlaku

$$P(|Y - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

Ilustrasi Pertidaksamaan Chebysev

Ide : ingin menentukan batas bawah atau batas atas suatu peluang.

$$P(|Y - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

Y ~ Binomial (n, p)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, & y = 0, 1, 2, ..., n \\ 0, & y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Apakah $P_Y(y)$ suatu fungsi peluang ?

Untuk hal ini dapat diperlihatkan melalui "binomial expansion" sebagai berikut:

$$(a + b)^n = \sum_{y=0}^{n} {}_nC_y \, a^y \, b^{n-y} \quad \text{untuk } a > 0,\ b > 0.$$

Ambil a = p, b = 1 – p dan 0 < p < 1, maka

$$[p + (1-p)]^n = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}.$$

Y ~ Binomial (n, p)

Fmp, nilai harapan, dan ragam

Fmp :

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) = E(e^{tY}) &= \sum_{y=0}^{n} e^{ty} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} (pe^t)^y (1-p)^{n-y} \\
&= (q + pe^t)^n \qquad \textit{; sedangkan } q = 1 - p
\end{aligned}
$$

Turunan pertama dari fmp :

$$m'_Y(t) \equiv \frac{d}{dt} m_Y(t) = \frac{d}{dt}(q + pe^t)^n = n(q + pe^t)^{n-1} pe^t$$

Sehingga nilai harapannya adalah :

$$E(Y) = \left.\frac{d}{dt} m_Y(t)\right|_{t=0} = n(q + pe^0)^{n-1} pe^0 = n(q + p)^{n-1} p = np$$

Y ~ Binomial (n, p)

Fmp, nilai harapan, dan ragam

Turunan kedua dari fmp :

$$\frac{d^2}{dt^2} m_Y(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{n(q + pe^t)^{n-1} pe^t}_{m'_Y(t)} = n(n-1)(q + pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + n(q + pe^t)^{n-1} pe^t$$

Dengan demikian $E(Y^2)$ adalah :

$$E(Y^2) = \left.\frac{d^2}{dt^2} m_Y(t)\right|_{t=0} = n(n-1)(q+pe^0)^{n-2}(pe^0)^2 + n(q+pe^0)^{n-1} pe^0 = n(n-1)p^2 + np$$

dan ragamnya adalah :

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

Y ~ Geometrik (p)

$$p_Y(y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1}p, & y = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & y \text{ lainnya} \end{cases} \quad ; \quad \text{sedangkan } 0 < p < 1$$

Apakah $P_Y(y)$ suatu fungsi peluang ? Hal ini dapat diperlihatkan sbb.

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}p &= p\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x \\ &= \frac{p}{1-(1-p)} = 1 \end{aligned}$$

Fungsi pembangkit momen Y (bukti sebagai latihan)

$$m_Y(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}.$$

Y ~ Geometrik (p)

nilai harapan dan ragam

Turunan pertama dari fmp :

$$m'_Y(t) \equiv \frac{d}{dt}m_Y(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \frac{pe^t(1-qe^t) - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2}$$

Sehingga nilai harapannya adalah :

$$E(Y) = \frac{d}{dt}m_Y(t)\Big|_{t=0} = \frac{pe^0(1-qe^0) - pe^0(-qe^0)}{(1-qe^0)^2} = \frac{p(1-q) - p(-q)}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Dengan cara yang sama kita akan peroleh :

$$E(Y^2) = \frac{d^2}{dt^2}m_Y(t)\Big|_{t=0} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

Y ~ Poisson (λ)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, & y = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Apakah $P_Y(y)$ suatu fungsi peluang ? Hal ini dapat diperlihatkan sbb.

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} p_Y(y) &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

Fungsi pembangkit momen :

$$\begin{aligned} m_Y(t) = E(e^{tY}) &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!}}_{e^{\lambda e^t}} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp[\lambda(e^t - 1)] \end{aligned}$$

Y ~ Poisson (λ)

nilai harapan dan ragam

Turunan pertama dari fmp :

$$m'_Y(t) \equiv \frac{d}{dt} m_Y(t) = \frac{d}{dt} \exp[\lambda(e^t - 1)] = \lambda e^t \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

Sehingga nilai harapannya adalah :

$$E(Y) = \left. \frac{d}{dt} m_Y(t) \right|_{t=0} = \lambda e^0 \exp[\lambda(e^0 - 1)] = \lambda$$

Dengan cara yang sama kita akan peroleh :

$$\frac{d^2}{dt^2} m_Y(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{\lambda e^t \exp[\lambda(e^t - 1)]}_{m'_Y(t)} = \lambda e^t \exp[\lambda(e^t - 1)] + (\lambda e^t)^2 \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

$$E(Y^2) = \lambda + \lambda^2.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

Tentukan fungsi pembangkit momen, nilai harapan dan ragamnya dengan menggunakan fmp.

Y ~ Hipergeometri

Y ~ Binomial Negatif